1.2 後半

☆ Hodge $*$-operator

$\mathbb{R}$ vect.sp. と正定値対称双線形形式の組

$$\begin{cases} (V, \langle\,,\rangle) & : \text{ori. } d \text{次元 euclid.vect.sp.} \\ \mathrm{vol} \in \Lambda^d V & : V \text{の norm-1 orientation} \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{l} e_1, \dots, e_d : \text{o.n.b.} \\ \mathrm{vol} = e_1 \wedge \dots \wedge e_d \end{array} \right.$ に対し

Def.

$* : \Lambda^k V \to \Lambda^{d-k} V$ を、特徴づけ

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathrm{vol} \qquad (\alpha, \beta \in \Lambda^k V)$$

で定める。

Prop. 1.2.20

上の設定で、$*$ は以下をみたす。

i) $\{i_1, \dots, i_k\} \sqcup \{j_1, \dots, j_{d-k}\} = \{1, \dots, d\}$ なら

$$*(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \varepsilon \cdot e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{d-k}}$$

$$\text{w/} \quad \varepsilon = \mathrm{sgn}(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{d-k})$$

特に $*1 = \mathrm{vol}$

ii) $*$ は up to sign で self-adj. つまり

$$\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^{k(d-k)} \langle *\alpha, \beta \rangle \qquad (\alpha \in \Lambda^k V)$$

iii) $*$ は up to sign で対合. つまり

$$**\alpha = (-1)^{k(d-k)} \alpha \qquad (\alpha \in \Lambda^k V)$$

iv) $*$ は $(\Lambda^* V, \langle\,,\rangle)$ における等長変換.

以下 $*$ は基本的に V^* の方で考える.

★ (Dual) Lefschetz operator

$\begin{cases} (V, \langle , \rangle) : \text{euclid. vect. sp.,} \\ I : \text{compatible almost complex structure}, \quad \omega : \text{定まる fundamental form} \end{cases}$

Recall (Def.1.2.18) Lefschetz operator $L : \Lambda^* V^* \longrightarrow \Lambda^* V^* \; ; \; \alpha \mapsto \omega \wedge \alpha$

$: \Lambda^* V^*_{\mathbb{C}} \longrightarrow \Lambda^* V^*_{\mathbb{C}} \; ;$ 上の $\mathbb{C}$-linear 延長

Def 1.2.21

$\langle \Lambda\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, L\beta \rangle$

dual Lefschetz operator $\Lambda : \Lambda^* V^* \longrightarrow \Lambda^* V^*$: Lの随伴

$: \Lambda^* V^*_{\mathbb{C}} \longrightarrow \Lambda^* V^*_{\mathbb{C}}$: 上の $\mathbb{C}$-linear 延長

Rmk. 1.2.22

◦ I は V, V^* に ori. を定めるので V^* における $*$ も定まる.

◦ $\omega^n = n! \cdot \mathrm{vol}$ (本では $n!\, \omega^n = \mathrm{vol}$) これはいつも存在するのだった.

$\because$ $\{x^i\} \cup \{y^i = I(x^i)\}$ の形の V の o.n.b. を取ると

$\omega = \sum_{i=1}^{n} x^i \wedge y^i$ という表示があるのだった.

$$\omega^n = \sum_{j_1, \dots, j_n} (x^{j_1} \wedge y^{j_1}) \wedge \cdots \wedge (x^{j_n} \wedge y^{j_n})$$

$$= n! \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_n \\ j_1 = 1,\ j_n = n}} (x^{j_1} \wedge y^{j_1}) \wedge \cdots \wedge (x^{j_n} \wedge y^{j_n}) = n!\ \mathrm{vol}$$

Lem. 1.2.23

Λ は -2次であり, $\Lambda = *^{-1} \circ L \circ *$

Prf. $\langle \alpha, L\beta \rangle \cdot \mathrm{vol} \overset{*\text{の def}}{=} L\beta \wedge *\alpha \overset{L\text{の def}}{=} \omega \wedge \beta \wedge *\alpha$

対称

$\underset{\omega\text{は2次}}{=} \beta \wedge (\omega \wedge *\alpha) \underset{L\text{の def}}{=} \beta \wedge L*\alpha \underset{*\text{の def}}{=} \langle \beta, *^{-1} L * \alpha \rangle\, \mathrm{vol}.$

対称

L : 2次 より Λ : -2次 $\square$

☆ 各演算の延長

$$\begin{cases}
\circ \ \text{schalar product} & \langle\ ,\ \rangle : \begin{matrix} V\times V, & \bigwedge^* V\times\bigwedge^* V \\ V^*\times V^*, & \bigwedge^* V^*\times\bigwedge^* V^* \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R} \\
\circ \ \text{Lefschetz operator} & L : \bigwedge^* V^* \longrightarrow \bigwedge^* V^* \quad \left(\bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k+2} V^*\right) \\
\circ \ \text{dual} \quad \text{〃} & \Lambda : \quad \text{〃} \quad \left(\bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{k-2} V^*\right) \\
\circ \ \text{Hodge } *\text{-operator} & * : \quad \text{〃} \quad \left(\bigwedge^k V^* \to \bigwedge^{2m-k} V^*\right)
\end{cases}$$

$\alpha\wedge *\beta = \langle\alpha,\beta\rangle\cdot \mathrm{vol}$,　Λ と L は $\langle\ \rangle$ について随伴,　$\Lambda = *^{-1}\circ L\circ *$

$\Downarrow \otimes\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-linear & hermitian extension

$$\begin{cases}
\circ & \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}} : \begin{matrix} V_{\mathbb{C}}\times V_{\mathbb{C}}, & \bigwedge^* V_{\mathbb{C}}\times\bigwedge^* V_{\mathbb{C}} \\ V_{\mathbb{C}}^*\times V_{\mathbb{C}}^*, & \bigwedge^* V_{\mathbb{C}}^*\times\bigwedge^* V_{\mathbb{C}}^* \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{C} \\
\circ & L : \bigwedge^* V_{\mathbb{C}}^* \longrightarrow \bigwedge^* V_{\mathbb{C}}^* \quad \left(\bigwedge^k V_{\mathbb{C}}^* \to \bigwedge^{k+2} V_{\mathbb{C}}^*\right) \\
\circ & \Lambda : \quad \text{〃} \quad \left(\bigwedge^k V_{\mathbb{C}}^* \to \bigwedge^{k-2} V_{\mathbb{C}}^*\right) \\
\circ & * : \quad \text{〃} \quad \left(\bigwedge^k V_{\mathbb{C}}^* \to \bigwedge^{d-k} V_{\mathbb{C}}^*\right)
\end{cases}$$

$\alpha\wedge *\overline{\beta} = \langle\alpha,\beta\rangle\cdot \mathrm{vol}$,　Λ と L は $\langle\ \rangle_{\mathbb{C}}$ について随伴,　$\Lambda = *^{-1}\circ L\circ *$

<u>Lem. 1.2.24</u>　上の状況で、

i) $\bigwedge^k V_{\mathbb{C}}^* = \bigoplus_{p,q} \bigwedge^{p,q} V^*$ は $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$ について直交分解

ii) $* : \bigwedge^{p,q} V^* \longrightarrow \bigwedge^{n-q,n-p} V^*$　　$(n = \dim_{\mathbb{C}}(V, I))$

iii) $\Lambda : \bigwedge^{p,q} V^* \longrightarrow \bigwedge^{p-1,q-1} V^*$

prf.

i): $V^{1,0} = \langle z^1,\dots,z^n\rangle \overset{\text{Lem.1.2.26}}{\perp_{\langle,\rangle_{\mathbb{C}}}} V^{0,1} = \langle w^1,\dots,w^n\rangle$: $V_{\mathbb{C}}^*$ の $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$-o.n.b. が取れ、
$\{z^{i_1}\wedge\dots\wedge z^{i_p}\wedge w^{j_1}\wedge\dots\wedge w^{j_q} \in \bigwedge^{p,q} V^* \mid i_1<\dots<i_p,\ j_1<\dots<j_q\}_{p,q}$ が $\bigwedge^* V_{\mathbb{C}}^*$ の $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$-o.n.b.

iii): $\langle\Lambda\alpha,\beta\rangle_{\mathbb{C}} = \langle\alpha, L\beta\rangle_{\mathbb{C}}$ で、L は $(1,1)$ 次 , i) より

ii): $0\neq\alpha\in\bigwedge^{p,q}V^*$ なる $\overline{\alpha}\wedge *\alpha = \langle\overline{\alpha},\overline{\alpha}\rangle_{\mathbb{C}}\cdot\mathrm{vol}\neq 0$ で、

$\overline{\alpha}\in\bigwedge^{q,p}V^*$ より　$*\alpha\in\bigwedge^{n-q,n-p}V^*$.

□

✡ Counting Operator

Def. 1.2.25

Counting Operator H : $\Lambda^* V \longrightarrow \Lambda^* V \;=\; \sum_{k=0}^{2n} (k-n)\cdot \underbrace{\pi^k}_{\Lambda^k\text{への射影}}$

$$\begin{array}{ccccl}
\Lambda^* V & \longrightarrow & \Lambda^* V & & \\
\| & & \| & & \\
\Lambda^0 V & \longrightarrow & \Lambda^0 V & ; & -n\text{倍} \\
\vdots & & \vdots & & \\
\oplus & & \oplus & & \\
\Lambda^k V & \longrightarrow & \Lambda^k V & ; & (k-n)\text{倍} \\
\oplus & & \oplus & & \\
\vdots & & \vdots & & \\
\Lambda^{2n} V & \longrightarrow & \Lambda^{2n} V & ; & n\ \text{倍}
\end{array}$$

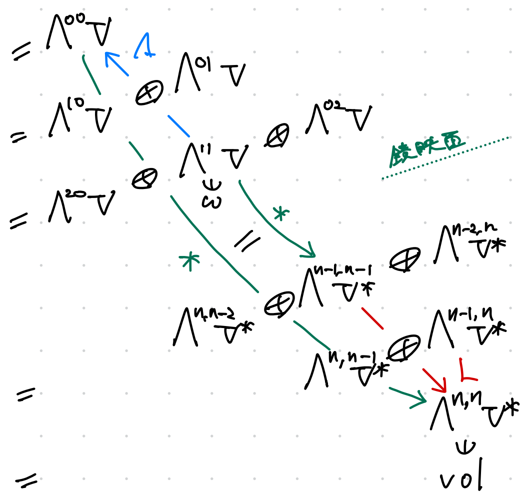
まとめ：

$$\begin{array}{ll}
\Lambda^* V^* & \\
\| & \\
\Lambda^0 V^* & \circlearrowleft \cdot(-n) \\
\oplus & \\
\Lambda^1 V^* & \circlearrowleft \cdot(1-n) \\
\oplus & \\
\Lambda^2 V^* & \circlearrowleft \cdot(2-n) \\
\oplus & \\
\vdots & \\
\oplus & \\
\Lambda^{d-2} V^* & \circlearrowleft \cdot(n-2) \\
\oplus & \\
\Lambda^{d-1} V^* & \circlearrowleft \cdot(n-1) \\
\oplus & \\
\Lambda^{d} V^* & \circlearrowleft \cdot n
\end{array}$$

Λ　L　$* \wr$　$* \wr$　$/\!/^{1.2.23}$　鏡映面　H

⟨,⟩直交

$$\begin{array}{l}
\Lambda^* V^*_{\mathbb{C}} \\
\| \\
\Lambda^0 V^*_{\mathbb{C}} = \\
\oplus \\
\Lambda^1 V^*_{\mathbb{C}} = \\
\oplus \\
\Lambda^2 V^*_{\mathbb{C}} = \\
\oplus \\
\vdots \\
\oplus \\
\Lambda^{d-2} V^*_{\mathbb{C}} = \\
\oplus \\
\Lambda^{d-1} V^*_{\mathbb{C}} = \\
\oplus \\
\Lambda^{d} V^*_{\mathbb{C}} =
\end{array}$$



⟨,⟩$_{\mathbb{C}}$ 直交

☆ 各演算子の交換関係

演算子 A, B に対し. $[A,B] = \underbrace{A\circ B - B\circ A}_{\text{非可換性をみる.}}$ とかく.

Prop. 1.2.26 $\Lambda^* V^*$ 上の演算子として

i) $[H, L] = 2L$ ii) $[H, \Lambda] = -2\Lambda$ iii) $[L, \Lambda] = H$

prf.

i) ii) L, Λ が $2, -2$ 次なので, $H\circ$ と $\circ H$ では出る係数が $2, -2$ ずれる.

iii) V の次元について帰納法.

○ $\dim_{\mathbb{C}}(V, I) = 1$ ⋯ $\Lambda^* V^* = \underset{=\mathbb{R}}{\Lambda^0 V^*} \oplus \underset{=V}{\Lambda^1 V^*} \oplus \underset{=\omega\mathbb{R}}{\Lambda^2 V^*}$ を直接計算.

○ $\dim_{\mathbb{C}}(V, I) \geq 2$

○ このとき $(V, \langle\rangle, I) = (W_1, \langle\rangle_1, I_1) \oplus (W_2, \langle\rangle_2, I_2)$: $\langle\rangle$-直交分解がある.

(∵ $x \in V$ ($\|x\|=1$) をひとつ取り. $y = I(x)$, $W_1 := x\mathbb{R} \oplus y\mathbb{R}$ とすれば $I(W_1) \subseteq W_1$

$W_2 := W_1^{\perp}$ とすれば, $I(W_2) \subseteq W_2$. $\langle\rangle, I$ をそれぞれに制限しても compatible.)

○ この分解により

$$
\begin{aligned}
\Lambda^* V^* &= \Lambda^* W_1^* \otimes \Lambda^* W_2^* \\
\text{特に}\quad \Lambda^2 V^* &= \Lambda^2 W_1^* \oplus \Lambda^2 W_2^* \oplus (W_1 \otimes W_2) \\
\omega &= \omega_1 + \omega_2 \quad (\omega_i \text{ は } W_i \text{ の fundamental form}) \\
L &= L_1 \otimes 1 + 1 \otimes L_2 \quad (L_i \quad \text{〃}) \\
\Lambda &= \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_2 \quad (\Lambda_i \quad \text{〃})
\end{aligned}
$$

($\omega \in \Lambda^2 V^*$, $\omega_1 \in \Lambda^2 W_1^*$, $\omega_2 \in \Lambda^2 W_2^*$)

帰納法の仮定を使って定義通りゴリゴリ計算 (省略) □

Cor. 1.2.27

L, Λ, H により $\Lambda^* V^*$ 上に $\mathfrak{sl}(2)$ の表現が定まる.

Cor. 1.2.28

$[L^i, \Lambda](\alpha) = i(k-n+i-1)L^{i-1}(\alpha)$ for $\alpha \in \Lambda^k V^*$

☆ $\mathfrak{sl}(2)$ の表現　　K：体

∘ $\mathfrak{sl}(2,K) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,K) \;\middle|\; a+d=0 \right\}$

$$= \mathrm{span}_K \left\langle X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

∘ $[M,N] = MN - NM$ とおくと、$\boxed{[B,X] = 2X,\ [B,Y] = -2Y,\ [X,Y] = B}$

特に $\mathfrak{sl}(2,K)$ は $[\,,\,]$ で閉じている。

∘ V：K-vect と $\rho : \mathfrak{sl}(2,K) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$：$K$-linear の組であって

$$\forall M,N \in \mathfrak{sl}(2,K),\quad \rho([M,N]) = [\rho(M), \rho(N)]$$

$:= \rho(M)\rho(N) - \rho(N)\rho(M)$

をみたすものを $\mathfrak{sl}(2,K)$ の表現という。

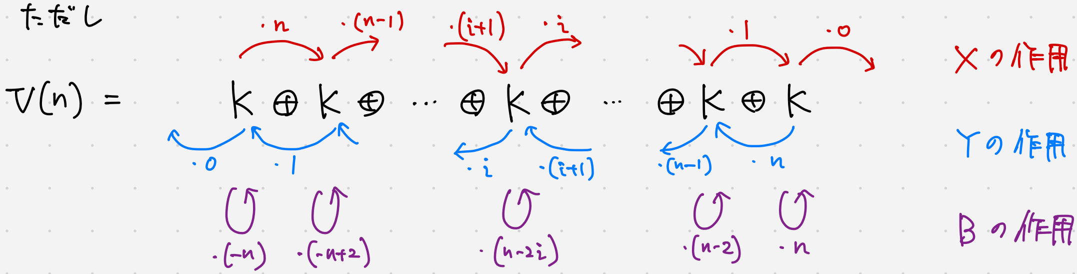
Facts

※必ず既約表現の直和に分解できる

☆ $\mathfrak{sl}(2,K)$ の有限次元表現は完全可約である。

☆ $\mathfrak{sl}(2,K)$ の有限次元既約表現は、$n \geq 0$ に対する $V(n)$ で尽くされる。

ただし



は $(n+1)$次元既約表現。

$Y\alpha = 0$ なる α を取ると、$V(n)$ は $\alpha, X\alpha, X^2\alpha, \ldots, X^n\alpha$ で生成される。

⇝ よって $\mathfrak{sl}(2,K)$ の有限次元表現は

どこかで0になる

・$Y\alpha = 0$ なる α を取り、$\mathrm{span}_K\langle \alpha, X\alpha, \cdots \rangle$ の補空間を取る

をくり返すことで $V(n_i)$ たちの直和に分解される。

☆ $\Lambda^* V^*$ の Lefschetz decomposition

Def. 1.2.29

・ $\alpha \in \Lambda^k V^*$ が primitive $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\Lambda \alpha = 0$

・ $P^k := \{ \alpha \in \Lambda^k V^* \mid \alpha$ は primitive$\} \subseteq \Lambda^k V^*$: 部分空間

Prop. 1.2.30

$\Lambda^* V^*$ (n: even の場合の表)

$$
\begin{array}{ccl}
\Lambda^* V^* & & \\
\parallel & & \\
\Lambda^0 V^* & = & P^0 \\
\oplus & & \\
\Lambda^1 V^* & = & P^1 \\
\oplus & & \\
\Lambda^2 V^* & = & P^2 \oplus L^1(P^0) \\
\oplus & & \\
\Lambda^3 V^* & = & P^3 \oplus L^1(P^1) \\
\oplus & & \\
\vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \\
\oplus & & \\
\Lambda^{n-1} V^* & = & P^{n-1} \oplus L^1(P^{n-3}) \oplus \cdots \\
\oplus & & \\
\Lambda^{n} V^* & = & P^{n} \oplus L^1(P^{n-2}) \oplus \cdots \oplus L^{\frac{n}{2}}(P^0) \\
\oplus & & \\
\Lambda^{n+1} V^* & = & \qquad L^1(P^{n-1}) \oplus \cdots \oplus L^{\frac{n}{2}}(P^1) \\
\oplus & & \\
\vdots & & \qquad\qquad \ddots \\
\oplus & & \\
\Lambda^{2n-3} V^* & = & \qquad\qquad L^{n-3}(P^3) \oplus L^{n-2}(P^1) \\
\oplus & & \\
\Lambda^{2n-2} V^* & = & \qquad\qquad\qquad L^{n-2}(P^2) \oplus L^{n-1}(P^0) \\
\oplus & & \\
\Lambda^{2n-1} V^* & = & \qquad\qquad\qquad\qquad L^{n-1}(P^1) \\
\oplus & & \\
\Lambda^{2n} V^* & = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad L^n(P^0)
\end{array}
$$

(i) 横列は $\langle , \rangle$ について直交分解

(ii) $P^k = 0$ for $k > n$

(iii) $P^k \xhookrightarrow[\text{inj.}]{L^{n-k}} \Lambda^{2n-k} V^*$ for $k \le n$

(iv) $\Lambda^k V^* \xrightarrow[\text{bij.}]{L^{n-k}} \Lambda^{2n-k} V^*$ for $k \le n$

(v) $P^k = \{ \alpha \in \Lambda^k V^* \mid L^{n-k+1} \alpha = 0 \}$ for $k \le n$

Lefschetz decomposition
$$\Lambda^k V^* = \bigoplus_{i \ge 0} L^i (P^{k-2i})$$

prf.

i): このような直和分解になることは、$\mathfrak{sl}(2)$ の表現論の結果。

$\langle , \rangle$-直交性：Cor. 1.2.28 $\left([L^i, \Lambda] = i(k-n+i-1)L^{i-1} \text{ on } \Lambda^k V^* \right)$ より。

$\alpha \in P^{k-2i}$, $\beta \in P^{k-2j}$ $(i<j)$ に対し　ここで $\Lambda\alpha = \Lambda\beta = 0$ なので

$$\langle L^i\alpha, L^j\beta \rangle = \langle \Lambda^{i+1} L^i\alpha, L^{j-i-1}\beta \rangle = (\text{スカラー}) \langle \Lambda\alpha, L^{j-i-1}\beta \rangle = 0.$$

ii) iii) iv) v) Cor. 1.2.28 による計算 □

☆ Hodge $*$-operator と Lefschetz operator の相互作用

Prop. 1.2.31 $\alpha \in P^k$

$$* L^j \alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j} \mathbf{I}(\alpha)$$

Def. 1.2.10. V 上の構造 $\mathbf{I}$ を乗法的に $\Lambda^* V^*$ に延長したもの

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^* V^* \arrow[d, phantom, "\parallel"] & & \\
\vdots & & \\
\Lambda^k V^* \supseteq P^k \ni & \alpha \arrow[r, mapsto, "\mathbf{I}"] \arrow[dd, mapsto, "L^j"'] & \mathbf{I}(\alpha) \arrow[dddddd, mapsto, "L^{n-k-j}"] \\
\vdots & & \\
\Lambda^{k+2j} V^* \ni & L^j\alpha \arrow[dddd, mapsto, "*"'] & \\
\vdots & & \\
\Lambda^n V^* \ \text{鏡映} & & \\
\vdots & & \\
\Lambda^{2n-k-2j} V^* \ni & * L^j\alpha \arrow[r, mapsto, "?"] & L^{n-k-j}\mathbf{I}(\alpha)
\end{tikzcd}$$

$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \dfrac{j!}{(n-k-j)!}$ 倍.

prf. $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ についての帰納法.

$I(x_1)=y_1$ in V

・$\dim_{\mathbb{C}}(V)=1$ … $\Lambda^* V^* = 1\mathbb{R}\oplus x'\mathbb{R}\oplus y'\mathbb{R}\oplus \omega\mathbb{R}$ で具体的に計算.

$\mathbf{I}(\omega)=\omega \qquad \mathbf{I}(x') = -y'$ $\left(\begin{tikzcd} x_1 \arrow[d, "I"] & x' \arrow[d, "\mathbf{I}"] \arrow[r] & 1 \\ -y_1 & -y' \arrow[ur] & \end{tikzcd}\right)$ より OK.

・$\dim_{\mathbb{C}}(V)\geq 2$

・Prop. 1.2.26 と同様に直和分解 $(V,\langle\ \rangle,I) = (W_1,\langle\ \rangle_1,I_1)\overset{\text{直交}}{\oplus}(W_2,\langle\ \rangle_2,I_2)$ を取る.

$L = L_1\otimes 1 + 1\otimes L_2$ 　$*$ は $\Lambda^{k_1}W_1^*\otimes\Lambda^{k_2}W_2^*$ 上に $* = (-1)^{k_1k_2} *_1\otimes *_2$ である.

$\Lambda = \Lambda_1\otimes 1 + 1\otimes\Lambda_2$, 　(直交分解についての $*$ の一般論. $\alpha\wedge *\beta = \langle\alpha,\beta\rangle \mathrm{vol}$ より)

・しかし Lefschetz decomposition についてはきれいにならないらしい.

・$W_2 = x_1\mathbb{R}\oplus y_1\mathbb{R}$: $\dim_{\mathbb{C}}=1$ としてよい. (ただし $y_1 = I(x_1)$) $\alpha\in P^k\ (\subseteq \Lambda^k V^*)$ をひとつ取る.

・$\Lambda^* V^* = \Lambda^* W_1^* \otimes (1\mathbb{R}\oplus x'\mathbb{R}\oplus y'\mathbb{R}\oplus\omega\mathbb{R})$

・$\Lambda^k V^* = (\Lambda^k W_1^*\otimes 1\mathbb{R})\oplus(\Lambda^{k-1}W_1^*\otimes x'\mathbb{R})\oplus(\Lambda^{k-1}W_1^*\otimes y'\mathbb{R})\oplus(\Lambda^{k-2}\mathbb{R}\otimes\omega\mathbb{R})$

$\alpha = \beta_k + \beta'_{k-1}\otimes x' + \beta''_{k-1}\otimes y' + \beta_{k-2}\otimes\omega$ と書ける.

・$\Lambda\alpha = \Lambda_1\beta_k + (\Lambda_1\beta'_{k-1})\otimes x' + (\Lambda_1\beta''_{k-1})\otimes y' + (\Lambda_1\beta_{k-2})\otimes\omega + \beta_{k-2}$

$= 0$ 　($\alpha\in P^k$: primitive より)

$\forall \gamma\in\Lambda^{00}V^*$, $\langle\omega, L(\gamma)\rangle = \langle\omega,\underset{\in\mathbb{R}}{\gamma}\omega\rangle = \gamma\langle\omega,\omega\rangle = \gamma\cdot 1 = \langle 1,\gamma\rangle$ より $\Lambda\omega = 1$

よって $\Lambda_1\beta_k + \beta_{k-2} = 0$ かつ $\beta'_{k-1}, \beta''_{k-1}, \beta_{k-2}$: primitive

$\beta_k = \gamma_k + L_1\gamma_{k-2}$ と分けると $\beta_{k-2} = -\Lambda_1 L_1\gamma_{k-2}$. $\beta^{k-2}\in P^{k-2}$ より

$\gamma_{k-2}\in P^{k-2}$ なので $\Lambda_1\gamma_{k-2}=0$ なので $= H_1\gamma_{k-2} = (k-n-1)\gamma_{k-2}$

・$L^j = (L_1\otimes 1 + 1\otimes L_2)^j \overset{\text{二項定理}}{=} L_1^j\otimes 1 + jL_1^{j-1}\otimes L_2$ 　(W_2 : 1次元より)

・$\beta'_{k-1}, \beta''_{k-2}, \gamma_k, \gamma_{k-2}$ には帰納法の仮定が使えるので

・左辺 $*L^j\alpha$ は計算できる ($\mathbf{I}_1$, L_1 は分る)

・右辺は $I = I_1 + I_2$ より $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1\otimes\mathbf{I}_2$ で.

$\mathbf{I}(\alpha) = \mathbf{I}_1(\beta_k) + \mathbf{I}_1(\beta'_{k-1})\otimes\underbrace{\mathbf{I}_2(x')}_{=-y'} + \mathbf{I}_1(\beta''_{k-1})\otimes\underbrace{\mathbf{I}_2(y')}_{=x'} + \mathbf{I}_1(\beta_{k-2})\otimes\underbrace{\mathbf{I}_1(\omega)}_{=\omega}$

から計算できる.

・一致する. $\square$

Example 1.2.32

$$*L^j\alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{j!}{(n-k-j)!} L^{n-k-j}\mathbb{I}(\alpha)$$ を使ってみる. ($L = \omega\wedge-$ に注意)

- $j=k=0,\ \alpha=1 \rightsquigarrow *1 = \dfrac{\omega^n}{n!}$ … Rem. 1.2.22
- $j=1,\ k=0,\ \alpha=1 \rightsquigarrow *\omega = \dfrac{1}{(n-1)!}\omega^{n-1}$
- $j=0,\ k=2\ \ \alpha\in P^2\cap\underbrace{\Lambda^{1,1}}V^* \rightsquigarrow *\alpha = \dfrac{-1}{(n-2)!}\omega^{n-2}\wedge\alpha$

$$\mathbb{I}(\alpha) = i^{1-1}\alpha = \alpha$$

$$\alpha\wedge*\bar\alpha = \frac{-1}{(n-2)!}\alpha\wedge\omega^{n-2}\wedge\bar\alpha$$

$$\langle\alpha,\alpha\rangle_{\mathbb{C}} = \frac{-1}{(n-2)!}\alpha\wedge\bar\alpha\wedge\omega^{n-2} = \frac{-1}{(n-2)!}Q(\alpha,\alpha)$$

$$\langle\alpha,\alpha\rangle_{\mathbb{C}} \geq 0$$

Rem. 1.2.33

- L, Λ, H は $(1,1), (-1,-1), (0,0)$ 次なので. Lefschetz decomposition は

  この2重次数についても整合的 ($\Leftrightarrow$ 各直和因子は「各次部分を取る」で安定)

  ($\because$ $P^k_{\mathbb{C}}$ についてのみ確かめればよいが、$\alpha\in P^k_{\mathbb{C}}$ だとし、$\alpha=\sum\alpha_{p,q}$ を各次分解をすると、$0=\Lambda\alpha=\sum\Lambda\alpha_{p,q}$ で、$\Lambda\alpha_{p,q}\in\Lambda^{p-1,q-1}V^*$ は異なる因子にいるから各々0.

  i.e. $P^k_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} P^{p,q}$ $\quad$ ($P^{p,q} = P^k_{\mathbb{C}}\cap\Lambda^{p,q}V^*$)

$$L(\bar\alpha) = \overline{L(\alpha)}, \quad \Lambda(\bar\alpha) = \overline{\Lambda(\alpha)}$$ より $\overline{P^{p,q}} = P^{q,p}$

$$\begin{aligned}
\Lambda^k V^*_{\mathbb{C}} &= \Lambda^{k,0}V^* \oplus \Lambda^{k-1,1}V^* \oplus \cdots \\
&= P^{k,0} \oplus P^{k-1,1} \oplus \cdots \oplus L^1(P^{k-2,0}) \oplus L^1(P^{k-3,1}) \oplus \cdots \\
&= P^k_{\mathbb{C}} \oplus L^1(P^{k-2}_{\mathbb{C}}) \oplus \cdots
\end{aligned}$$

Example 1.2.34

$$\Lambda^2 V^*_{\mathbb{C}} = P^{2,0} \oplus P^{1,1} \oplus P^{0,2} \oplus \underbrace{L(P^{0,0})}_{=\omega\mathbb{C}}$$

✡ Hodge-Riemann bilinear relation

Def. 1.2.35 Hodge-Riemann pairing

$$Q : \Lambda^k V^* \times \Lambda^k V^* \longrightarrow \Lambda^{2n} V^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \qquad (\mathrm{vol} \mapsto 1)$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-k}$$

あるいは、延長した

$$\Lambda^k V_{\mathbb{C}} \times \Lambda^k V_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \alpha \wedge \overline{\beta} \wedge \omega^{n-k}$$

も Q で書く

Cor. 1.2.36 (Hodge-Riemann bilinear relation)

- $(p,q) \neq (p',q')$ に対し $Q\left(\Lambda^{p,q} V^*, \Lambda^{p',q'} V^*\right) = 0$
- $0 \neq \alpha \in P^{p,q}$ $(p+q \leq n)$ に対し $i^{p-q} Q(\alpha, \overline{\alpha}) = (n-(p+q))! \cdot \langle \alpha, \alpha \rangle_{\mathbb{C}} > 0$

prf. 上は $\underbrace{\alpha}_{(p,q)} \wedge \underbrace{\overline{\beta}}_{(q',p')} \wedge \underbrace{\omega^{n-k}}_{(n-k,n-k)}$ が (n,n) になる必要があるから OK.

下は $\wedge \omega^{n-k}$ 部分を L で書き換えて Prop. 1.2.31 を使う.

I の表示より i^{p-q} が出てくる. □

Example 1.2.37 $(-)_{\mathbb{R}} = - \cap \Lambda^2 V^*$ と書くことにして

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Lambda^2 V^*_{\mathbb{C}} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
\Lambda^2 V^* \arrow[dr, dash] & \cap & \Lambda^{1,1} V^* = P^{1,1} \oplus \underset{\omega\mathbb{C}}{\underset{\parallel}{L(P^{0,0})}} \arrow[dl, dash] \\
 & (\Lambda^{1,1} V^*)_{\mathbb{R}} = P^{1,1}_{\mathbb{R}} \ni \alpha \oplus \omega\mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

: これは Q-直交. $(\because$ Prop. 1.2.30 (v). $\alpha \wedge \omega^{n-1} = 0)$

さらに Q は 負定値 正定値 対称となる.

$\left(\begin{array}{l} \because Q(\omega,\omega) = \omega^n = n!(\cdot \mathrm{vol}) > 0 \\ P^{1,1} \text{ の方は上の Cor. の 2つ目} \end{array}\right)$

→ 3.3 節の Hodge 指数定理へ